МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Вища математика

Кратні інтеграли та їх застосування

Розрахункова робота

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» та
144 «Теплоенергетика»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Вища математика: Кратні інтеграли та їх застосування: Розрахункова робота [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» та 144 «Теплоенергетика» /КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.Ф. Зражевська, Г.М. Зражевський. – Електронні текстові данні (1 файл: 1.33 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 34 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 27.02.2020 р.) за поданням Вченої ради Інституту енергозбереження та енергоменеджменту (протокол № 10 від 27.01.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Вища математика

Кратні інтеграли та їх застосування

Розрахункова робота

Укладачі: *Зражевська Віра Федорівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.*
Зражевський Григорій Михайлович, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *Дудкін.М.Є., докт. фіз.-мат. наук, проф.*

Рецензент: *Моклячук М.П., докт. фіз.-мат. наук,. професор кафедри теорії ймовірностей, математичної статистики та актуарної математики КНУ ім. Тараса Шевченка*

Навчальний посібник забезпечує проведення практичних занять та виконання розрахункової роботи, передбачених навчальною програмою дисципліни “Вища математика 3” для спеціальностей 141 “Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка” та 144 “Теплоенергетика”. Тематика вказівок охоплює розділ навчальної програми, що стосується теорії кратних інтегралів та їх застосувань. У роботі стисло наведено основний теоретичний матеріал, розібрано розв'язання типових прикладів.
Вказівки містять 25 варіантів завдань, які можуть бути використані студентами очної та заочної форм навчання при роботі над матеріалом по даній темі.

Зміст

Вступ

Мета навчального посібника - допомогти студентам глибше вивчити один з найскладніших розділів курсу вищої математики на тему "Кратні, інтеграли та їх застосування". У роботі надано основні теоретичні відомості на тему, наведено приклади розв'язання типових задач.

Вказівки містять 25 варіантів розрахункової роботи по розглянутій темі. Запропоновані задачі можуть бути корисними для викладачів при складанні контрольних завдань по темі "Кратні, інтеграли та їх застосування" та для студентів очної та заочної форм навчання, що вивчають вищу математику, для організації самостійної роботи.

1. Подвійний інтеграл, його обчислення та застосування

1.1 Означення та властивості подвійного інтеграла. На площині Oxy розглянемо замкнену область D, в кожній точці якої задана неперервна функція $f(x,y)$. Розіб'ємо D на елементарні підобласті $D_i\ (i=\overline{1,n})$. Позначимо через $\Delta S_i\ (i=\overline{1,\text{n}})$ площу D_i, а через d_i- діаметр (тобто найбільшу відстань між точками області) D_i. У кожній області D_i виберемо довільну точку $M_i(x_i,y_i)$ ().

Означення. Якщо існує $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i\to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f\,(x_i,y_i)\Delta S_i$, яка не залежить ні від способу розбиття області D на підобласті D_i, ні від способу вибору точок M_i, то ця границя називається подвійним інтегралом від функції $f(x,y)$ по області D, який позначається $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

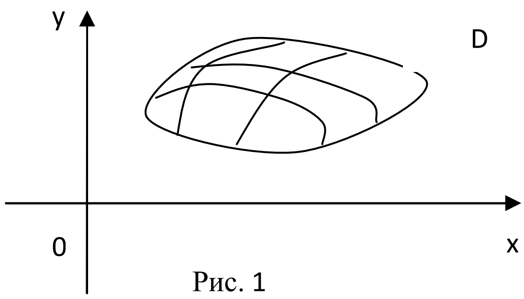

Рис. 1

Отже, подвійний інтеграл визначається рівністю: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{\max di\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i.$

В цьому випадку функція $f(x,y)$ називається інтегровною в області D, область D називається областю інтегрування, змінні x,y - змінні інтегрування.

Можна строго довести, що якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкнутій області D, то вона інтегровна в цій області. Надалі розглядаються тільки неперервні в області інтегрування функції.

Вкажемо деякі властивості подвійного інтеграла, які найчастіше використовуються при його обчисленні .

<u>Властивість 1</u>. Якщо $f_i(x,y)$, $i=\overline{1,\text{n}}$ неперервні в D функції, а c_i, $i=1,\vec{n}$ - довільні сталі, то:

$$\iint_D (c_1 f_1(x,y) + \ldots + c_n f_n(x,y))dxdy = c_1 \iint_D f_1(x,y)dxdy + \ldots + c_n \iint_D f_n(x,y)dxdy.$$

Властивість 2. Якщо область $D = D_1 \cup D_2$ і перетин областей D_1 і D_2 складається лише з лінії, що їх роз'єднує, то: $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$

Властивість 3. Якщо в області D $f(x,y) \geq 0$, то і $\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0.$

Повний перелік властивостей подвійного інтеграла можна знайти в [1,2,3].

1.2. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах. Обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення двократного інтеграла.

Нехай область D є криволінійною трапецією, що обмежена прямими $x = a$, $x = b$ і кривими $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, причому, функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ - неперервні і такі, що $y_1(x) \leq y_2(x)$ для всіх $x \in [a;b]$ (Рис.2).

Така область є правильною в напрямі осі Oy: будь-яка пряма, паралельна осі Oy, перетинає границю області не більше ніж в двох точках. Вважаємо, що функція $f(x,y)$ є неперервною в області D. Тоді буде існувати двократний

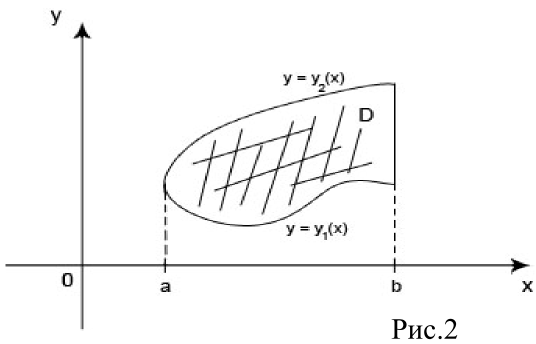

Рис.2

інтеграл $\int_a^b \left(\int_{y_2(x)}^{y_1(x)} f(x,y)dy \right) dx$, який частіше записують у вигляді $\int_a^b dx \int_{y_2(x)}^{y_1(x)} f(x,y)dy.$, і має місце рівність :

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_2(x)}^{y_1(x)} f(x,y)dy. \qquad (1)$$

Для обчислення двократного інтеграла (1) спочатку знаходимо інтеграл $\int\limits_{y_2(x)}^{y_1(x)} f(x,y)dy$ по y, вважаючи x сталою. Інтеграл $\int\limits_{y_2(x)}^{y_1(x)} f(x,y)dy$ називається внутрішнім інтегралом. В результаті підстановки отримаємо деяку неперервну функцію від x, яку вже інтегруємо по x в межах від a до b.

Якщо ж область D задається лініями: $y=c, y=d \ (c<d)$, $x=x_1(y), x=x_2(y)$, при чому $x_1(y) \le x_2(y)$ для всіх $y\in[\text{c};\text{d}]$, (D є правильною в напрямі осі OX), то буде виконуватись рівність:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(\text{y})}^{x_2(\text{y})} f(x,y)dx. \qquad (2)$$

Якщо область D правильна в напрямках і осі Ox і осі Oy, то подвійний інтеграл можна обчислити і по формулі (1), і по формулі (2). Якщо область D не є правильною ні в напрямі Ox, ні в напрямі Oy, то її слід розбити на підобласті, що є правильними в напрямі або Ox або Oy, і скористатися властивістю 2 для обчислення подвійного інтеграла.

Приклад. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$, де область D обмежена лініями $y=x, y=\dfrac{1}{x}, x=2$.

Розв'язання. Зображуємо область інтегрування D (Рис.3), яка є правильною в напрямі Ox. Скористаємося формулою (1). Щоб знайти межі зовнішнього інтеграла по x знайдемо ортогональну проєкцію D на вісь OX: $x\in[1;2]$, отже, в зовнішньому інтегралі межі від 1 до 2. Тепер візьмемо довільне $x\in[1;2]$, зафіксуємо його (проведемо на рисунку пряму $x=const$) і з'ясуємо, як при цьому

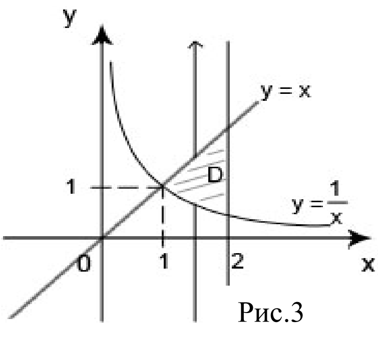

Рис.3

значенні x змінюється y. Найменше значення y знаходимо з рівняння $y=\frac{1}{x}$, а найбільше – з рівняння $y=x$ для будь-якого $x\in[1;2]$, отже: $\iint\limits_D xydxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} xydy$. Обчислення двократного інтеграла починаємо з обчислення внутрішнього інтеграла. Оскільки цей інтеграл по y, то x в ньому виступає в якості сталої і виноситься за знак інтеграла

$$\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} xydy=x\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} ydy=x\left.\frac{y^2}{2}\right|_{\frac{1}{x}}^{x}=\frac{x}{2}(x^2-\frac{1}{x^2})=\frac{x^3}{2}-\frac{1}{2x}.$$

Знайдену функцію підставляємо у зовнішній інтеграл по x:

$$\int\limits_1^2(\frac{x^3}{2}-\frac{1}{2x})dx=\int\limits_1^2\frac{x^3}{2}dx-\int\limits_1^2\frac{1}{2x}dx=\frac{1}{2}\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2-\frac{1}{2}\ln x\Big|_1^2=\frac{1}{2}(4-\frac{1}{4})-\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{15}{8}-\frac{\ln 2}{2}.$$

Тепер поміняємо порядок інтегрування і скористаємося формулою (2) (Рис. 4). Щоб розставити межі в зовнішньому інтегралі, проєктуємо область на вісь Oy. Нижня межа знаходиться як перетин лінії $y=\frac{1}{x}$ і прямої $x=2$, тобто $y=\frac{1}{2}$. Верхня межа знаходиться як точка перетину прямих $y=x$, $x=2$, тобто $y=2$. Щоб розставити межі по x зафіксуємо y, тобто проведемо

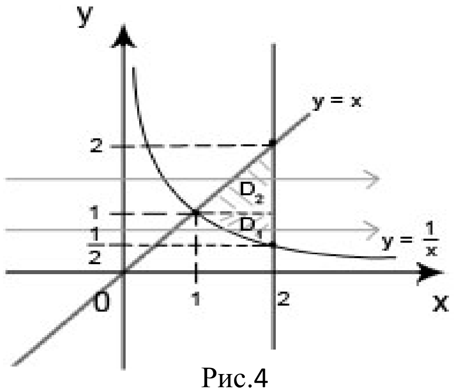

Рис.4

пряму $y=const$. Якщо брати довільне $y\in[\frac{1}{2};1]$, то нижня межа x визначається з рівняння $y=\frac{1}{x}=>x=\frac{1}{y}$, а верхня з прямої $x=2$. Для будь-якого $y\in[1;2]$, нижня межа знаходиться з рівняння $y=x=>x=y$, а верхня з $x=2$. Отже, при такій послідовності інтегрування область треба розбивати на дві області: D_1 і D_2 і користуватися властивістю 2 подвійного інтеграла:

$$\iint_D xydxdy = \iint_{D_1} xydxdy + \iint_{D_2} xydxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\frac{1}{y}}^{2} xydx + \int_{1}^{2} dy \int_{y}^{2} xydx .$$

Інтегруючи аналогічно, отримуємо ту ж саму відповідь:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} y\frac{x^2}{2}\bigg|_{\frac{1}{y}}^{2} dy + \int_{1}^{2} y\frac{x^2}{2}\bigg|_{y}^{2} dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2y - y\frac{1}{2y^2}\right)dy + \int_{1}^{2}\left(2y - \frac{y^3}{2}\right)dy =$$

$$= \left(y^2 - \frac{1}{2}\ln y\right)\bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} + \left(y^2 - \frac{y^4}{8}\right)\bigg|_{1}^{2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + 4 - 2 - 1 + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Приклад. Змінити порядок інтегрування в інтегралі: $\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy.$

Розв'язання. Зобразимо область інтегрування D (Рис. 5). Область обмежена лініями: $y = \frac{x^2}{4} - 1$; $y = 2 - x$. Знаходимо точки перетину параболи $y = \frac{x^2}{4} - 1$ і прямої $y = 2 - x$: $x_1 = 2;\ x_2 = -6$. Тоді $y_1 = 0;\ \ y_2 = 8;$. Отже, найменша ордината у точок області $y = -1,$ найбільша $y = 8$.

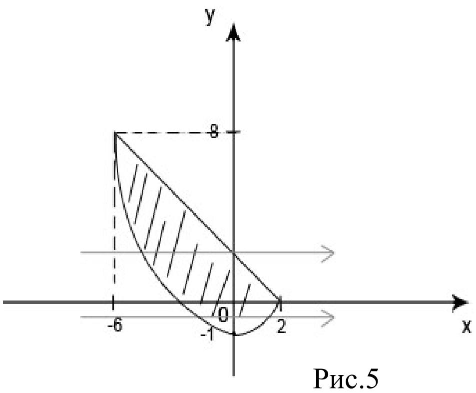

Рис.5

Взявши довільне значення $y \in [-1;0]$, з рисунка бачимо, що значення нижньої межі x визначається з лівої вітки параболи, а верхня – з правої. Шукаємо ці значення з рівняння параболи: $\frac{x^2}{4} = y + 1;$ $x^2 = 4(y+1); \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{y+1};$ Для довільного y з $[0;8]$ нижня межа по x визначається з рівняння лівої вітки параболи $x = -2\sqrt{y+1}$, а верхня – з рівняння прямої $x = 2 - y$. Отже, остаточно маємо:

$$\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y) = \int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_{0}^{8} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx .$$

1.3. Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах. Полярна система координат задається точкою O – полярним полюсом, полярною віссю і одиничним вектором того ж напряму, що і полярна вісь. Положення точки M на площині з введеною полярною системою координат визначається двома числами: полярним радіусом ρ, що визначається як відстань від полюса до точки, і полярним кутом φ, що утворений відрізком OM і полярною віссю. Кут відкладаємо від полярної осі проти руху годинникової стрілки. Щоб отримати всі точки площини достатньо визначити, що φ змінюється на $[0;2\pi)$, а ρ на $[0;\infty)$. Тоді кожній точці площини M відповідає єдина пара чисел (ρ,φ) і навпаки. Числа ρ,φ називаються полярними координатами точки ([5]).

Сумістимо полярну і декартову системи координат: полюс O сумістимо з початком відліку Oxy, полярну вість – з додатним напрямом осі Ox (Рис. 6). Нехай $(x;y)$ - декартові координати точки M, а (ρ,φ)- полярні. Тоді з прямокутного трикутника OAM випливає зв'язок декартових і полярних

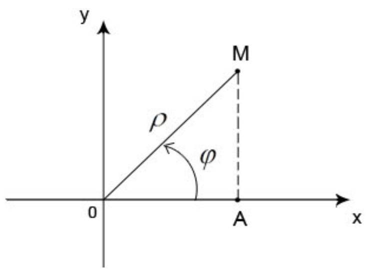

Рис.6

ко… ки M :

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi. \tag{3}$$

З (3) випливає: $x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2$. Тому перехід в подвійних інтегралах до полярних координат має сенс, коли підінтегральна функція має вигляд $f(x^2+y^2)$, область D обмежена колами або лініями, в рівняння яких входить вираз виду x^2+y^2.

Можна строго довести [1,4], що формула переходу від декартової системи координат до полярної в подвійному інтегралі має вигляд:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho, \tag{4}$$

де D^* - область в полярній системі координат, що відповідає області D в декартовій системі.

Подвійний інтеграл в полярних координатах також зводиться до двократного. Нехай D^* обмежена променями $\varphi=\alpha, \varphi=\beta; (\alpha<\beta)$, кривими $\rho=\rho_1(\varphi)$, $\rho=\rho_2(\varphi)$; $\rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi)$, для всіх $\phi\in(\alpha,\beta)$. Вважаємо область D^* правильною: промінь, що виходить із полюса, перетинає її границю не більш ніж в двох точка. Тоді ([1,2,3]):

$$\iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho . \qquad (5)$$

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, де область D обмежена лініями: $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x$.

Розв'язання. Сумістимо, як було вказано вище, декартову і полярну системи координат. Маємо 2 кола (Рис.7). Знаходимо їх полярні рівняння: $x^2+y^2=2x;$

$=> \rho^2=2\rho\cos\varphi;=> \rho=2\cos\varphi;$

$x^2+y^2=4x;=> \rho=4\cos\varphi;$

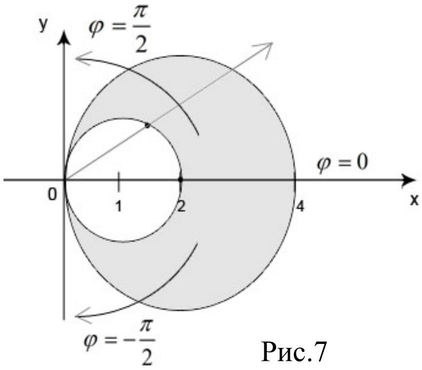

Рис.7

Область розташована в I і IV четверті декартової системи. Оскільки точки на додатній півосі Ox мають $\varphi=0$, то, щоб описати всі точки області в I четверті, маємо змінювати φ від 0 до $\frac{\pi}{2}$. Для точок, що лежать в IV четверті, треба здійснювати рух за годинниковою стрілкою, тобто $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$. Остаточно, зовнішні межі по φ в (5) будуть : $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Тепер зафіксуємо $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і проведемо промінь $\varphi=const$. З рисунка видно, що найменшу довжину ρ мають точки, що лежать на крузі $\rho=2\cos\varphi$, а найбільшу – на крузі $\rho = 4\cos\varphi$. Отже, ρ змінюється від $2\cos\varphi$ до $4\cos\varphi$. Тепер відповідно до формули (5) переходимо до полярних координатах: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}\rho d\rho.$ Обчислюємо внутрішній інтеграл по ρ, вважаючи φ сталою:

$$\int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \sqrt{\rho^2}\rho d\rho = \frac{\rho^3}{3}\Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} = \frac{64}{3}\cos^3\varphi - \frac{8}{3}\cos^3\varphi = \frac{56}{3}\cos^3\varphi.$$

Тоді зовнішній інтеграл:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{56}{3}\cos^3\varphi d\varphi = \frac{56}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{56}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2\varphi\right) d\sin\varphi =$$

$$= \frac{56}{3}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\sin\varphi - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\sin\varphi\right) = \frac{56}{3}\left(\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{56}{3}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{224}{9}.$$

1.4. Деякі застосування подвійного інтеграла. У даній розрахунковій роботі розглядаються наступні застосування подвійного інтеграла.

1. **Площа плоскої фігури.**

Щоб знайти площу області D, треба обчислити подвійний інтеграл з одиничною підінтегральною функцією ([1,3]):

$$S = \iint\limits_D dxdy \qquad (6)$$

Приклад. Знайти площу області D, що обмежена лініями: $x^2 + y^2 = 2y$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$; $y = \sqrt{3}x$.

Розв'язання. Будуємо область D (Рис. 8).

Оскільки в границю області входить коло, то обчислюємо інтеграл в полярних координатах. Всі точки, що лежать на промені $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ (в I четверті), мають $\varphi = \frac{\pi}{6}$ $\left(\rho\sin\varphi = \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}} => tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} => \varphi = \frac{\pi}{6}\right)$.

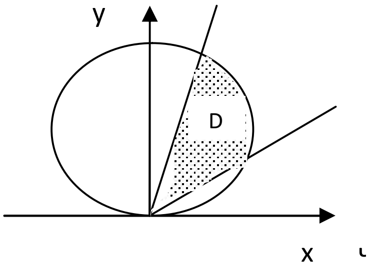

Рис.8

Аналогічно, для точок променя $y=\sqrt{3}x$: $\varphi=\frac{\pi}{3}$ $\left(tg\varphi=\sqrt{3}=>\varphi=\frac{\pi}{3}\right)$. Отже $,\varphi\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$. Зафіксуємо $\varphi\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ і проведемо промінь $\varphi=const$. Найменшу довжину має точка полюс $(\rho=0)$, а найбільшу – точка, що лежить на колі: $x^2+y^2=2y;=>\rho^2=2\rho\sin\varphi;=>\rho=2\sin\varphi$. Отже, маємо:

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}\rho d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2\sin\varphi}\right)d\varphi=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}2\sin^2\varphi\, d\varphi=2\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1-\cos2\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}\ \text{(кв.од.)}.$$

2. Маса плоскої фігури. Нехай є плоска пластина у формі області D, з поверхневою густиною $\gamma=\gamma(x,y)$. Вважаємо, що густина є неперервною функцією координат точки. Тоді маса плоскої пластини знаходиться по формулі [1,2]:

$$m=\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy \tag{7}$$

Приклад. Знайти масу пластини D, що обмежена кривими $x=2; y=0; y=\sqrt{\frac{x}{2}}$ з поверхневою густиною $\gamma=2x+3y^2$.

Розв'язання. За формулою (7): $m=\iint\limits_D\left(2x+3y^2\right)dxdy.$ Будуємо область D (Рис. 9). Обчислюємо інтеграл в декартовій системі координат. З рисунка видно: $x\in[0;2]$. При будь-якому фіксованому $x\in[0;2]$ найменше значення y визначається з прямої $y=0$, а найбільше - з вітки параболи $y=\sqrt{\frac{x}{2}}$. Отже:

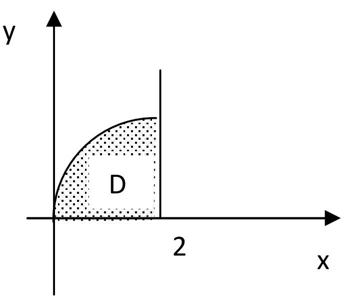

Рис.9

$m=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}}(2x+3y^2)dy.$ Обчислюємо внутрішній інтеграл:

$$\int\limits_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}}(2x+3y^2)dy=\int\limits_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}}2xdy+\int\limits_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}}3y^2dy=2xy\left|\begin{matrix}\sqrt{\frac{x}{2}}\\0\end{matrix}\right.+y^3\left|\begin{matrix}\sqrt{x/2}\\0\end{matrix}\right.=(2x\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}})=$$

$$=(\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}})x^{\frac{3}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{4}x^{3/2}.$$

Обчислюємо зовнішній інтеграл: $m=\frac{5\sqrt{2}}{4}\int\limits_0^2 x^{3/2}dx=\frac{5\sqrt{2}}{2}\frac{x^{5/2}}{5}\Big|_0^2=4$ (од.маси).

3.Об'єм циліндричного тіла. Розглянемо циліндричне тіло, тобто тіло, що обмежено зверху поверхнею $z=f(x,y)\geq 0$, знизу - замкненою областю D площини Oxy, з боків - циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі Oz , а напрямною є границя області D. Тоді можна довести ([1,2,3]), що об'єм такого циліндричного тіла знаходиться за формулою:

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy. \tag{8}$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, що обмежене параболоїдом $z=1+x^2+y^2$ і площинами: $z=0,\ x=0,\ y=0,\ x=1,\ y=1.$

Розв'язання. За формулою (8): $V=\iint\limits_D(1+x^2+y^2)dxdy,$ де область D зображена на Рис. 10. Обчислюємо інтеграл в декартових координатах: $V=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1(1+x^2+y^2)dy.$ Внутрішній інтеграл:

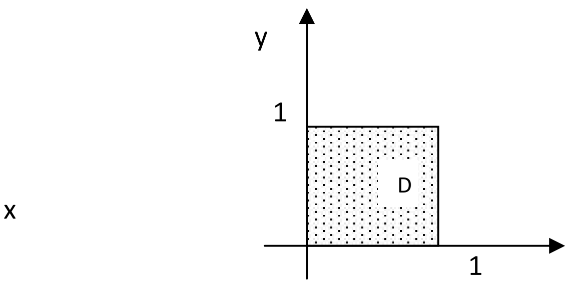

Рис.10

$$\int\limits_0^1(1+x^2+y^2)dy=\int\limits_0^1 dy+x^2\int\limits_0^1 dy+\int\limits_0^1 y^2dy=(y+x^2y+\frac{y^3}{3})\Big|_0^1=1+x^2+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}+x^2.$$

Тоді : $V=\int_0^1 (\frac{4}{3}+x^2)dx=(\frac{4x}{3}+\frac{x^3}{3})\Big|_0^1=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$ (куб.од.).

Інші застосування подвійного інтеграла можна знайти, наприклад, в [1,3].

2. Потрійний інтеграл, його обчислення та застосування

2.1. Означення та властивості потрійного інтеграла. Нехай в обмеженій замкненій області V простору $Oxyz$ задана неперервна функція $f(x,y,z)$. Розбиваємо V довільним чином на n підобластей, V_i, $i=\overline{1,n}$, об'єм яких відповідно ΔV_i, di - діаметр області. У кожній підобласті V_i вибираємо довільним чином точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

Означення : Якщо існує границя: $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$, яка не залежить ні від способу розбиття області на підобласті, ні від вибору точок M_i, то ця границя називається **потрійним інтегралом** від функції $f(x,y,z)$ по області V і позначається $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$. Отже, потрійний інтеграл визначається рівністю:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{\max di \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i. \tag{9}$$

Можна строго довести, що якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області V, то границя в формулі (9) існує і не залежить ні від способу розбиття області V на підобласті, ні від вибору точок M_i.

При обчисленні потрійного інтеграла використовують наступні властивості.

<u>Властивість 1.</u> Якщо $f_i(x,y,z)$, $i=\overline{1,n}$ інтегровані в області V функції, а $C_i = const$, $i=\overline{1,n}$, то:

$$\iiint\limits_V \left(C_1 f_1(x,y,z) + \ldots + C_n f_n(x,y,z)\right) dxdydz = C_1 \iiint\limits_V f_1(x,y,z)\,dxdydz + \ldots$$
$$\ldots + C_n \iiint\limits_V f_n(x,y,z)\,dxdydz.$$

Властивість 2. Якщо $V = V_1 \bigcup V_2$ і перетин V_1 і V_2 складається з границі, що їх розділяє, то $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz.$

Властивість 3. Якщо в області V $f(x,y,z) \geq 0$, то і $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$

Більш повно про властивості інтеграла можна прочитати, наприклад, в [1,2,3].

2.2. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах.

Нехай область інтегрування V обмежена двома поверхнями $z = z_1(x,y)$ і $z = z_2(x,y)$, область D- проєкція V на площину Oxy. Вважаємо, що функції $z_1(x,y)$ і $z_2(x,y)$ неперервні в D і для довільної точки $(x,y) \in D$ виконується нерівність: $z_1(x,y) \leq z_2(x,y)$. Вважаємо, що область V правильна в напрямі Oz, тобто довільна пряма, що паралельна осі Oz, перетинає границю області не більш ніж в двох точках. Тоді для неперервної області V функції $f(x,y,z)$ має місце формула:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy \tag{9}$$

Інтеграл по z називається внутрішнім, він обчислюється першим і результатом його обчислення є функція $\varphi(x,y)$. Далі іде обчислення подвійного інтеграла від $\varphi(x,y)$ по області D.

При необхідності, область V може бути спроєктована на інші координатні площини і тоді порядок інтегрування в формулі (9) буде іншим.

Приклад. Обчислити інтеграл: $\iiint\limits_V xdxdydz$, де область V обмежена площинами: $2x + 2y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Розв’язання. Побудуємо область інтегрування: $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$ - площина, що відтинає відрізки 1, 1, 2 на координатних осях Ox, Oy, Oz відповідно; $x=0$ - координатна площина Oyz, $y=0$ - координатна площина Oxz, $z=0$ - координатна площина Oxy відповідно. (Рис. 11). Отже, V - тетраедр і є правильною в напрямі Oz. Проєкція області на площину Oxy, область D, зображена на Рис. 12.

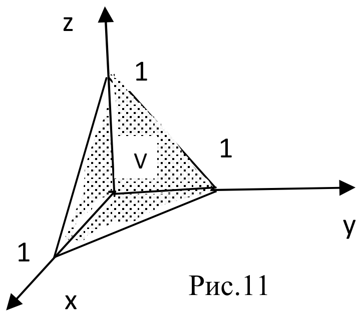

Рис.11

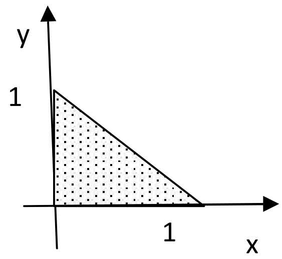

Рис.12

За формулою (9) інтеграли по x і y розставляємо по області D. Щоб розставити межі по z через довільну точку області D на Рис. 11 проведемо пряму, паралельно осі Oz. Нижня межа по z визначається з поверхні, в яку ми входимо - $z=0$, верхня – з поверхні, з якої виходимо: $2x+2y+z=2 \Rightarrow z=2-2x-2y$. Отже:

$$\iiint\limits_V xdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{2-2z-2y} xdz .$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл по z, вважаючи x і y сталими: $\int_0^{2-2z-2y} xdz = x\cdot z\Big|_0^{2-2x-2y}=2x-2x^2-2yx$. Обчислюємо інтеграл по y, вважаючи x сталою:

$$\int_0^{1-x}\left(2x-2x^2-2yx\right)dy=\left(2xy-2x^2y-2x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}=2x(1-x)-2x^2(1-x)-x\left(1-x\right)^2=$$
$$=x^3-2x^2+x.$$

Обчислюємо інтеграл по x:

$$\int_0^1 \left(x^3 - 2x^2 + x\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

2.3. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних координатах. Положення точки $M(x,y,z)$ в просторі $Oxyz$ можна визначити завданням трьох чисел (Рис. 13):

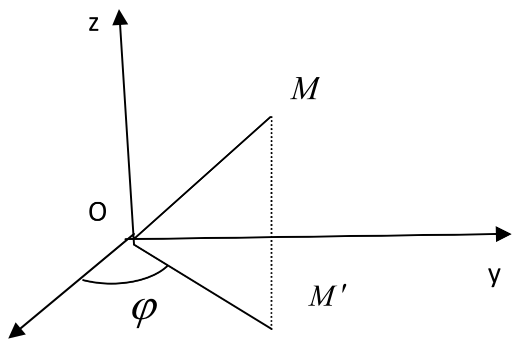

Рис.13

$\rho -$ довжина відрізка OM', де M'- проєкція точки M на площину Oxy; $\varphi -$ кут між додатним напрямом осі Ox і OM', що відраховується проти годинникової стрілки, $z -$ апліката точки M. Отже, $\rho \geq 0$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $z \in R$. Числа (ρ, φ, z) називаються циліндричними координатами точки M. Зв’язок між декартовими і циліндричними координатами точки:

$$x = \rho\cos\varphi\,,\ y = \rho\sin\varphi\,,\ z = z\ . \qquad (10)$$

Можна строго довести формулу переходу в потрійному інтегралі до циліндричних координат ([1,2,3]):

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz\,. \qquad (11)$$

Приклад. Обчислити $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, де V - область, що утворена поверхнями: $5 - z = x^2 + y^2$; $z = 1$.

Розв’язання. Зображуємо область інтегрування (Рис.14) і її проєкцію на площину Oxy (Рис.15). Проєкцією області V на площину Oxy буде круг.

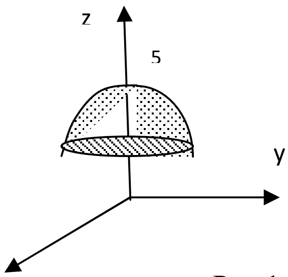

Рис.14

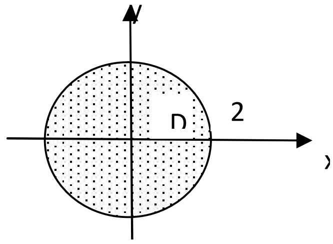

Рис.15

Знаходимо його центр і радіус: $\begin{cases} 5 - z = x^2 + y^2; \\ z = 1; \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$ Центр круга $O(0;0)$, $r = 2$. Переходимо в циліндричну систему координат (10). Рівняння кола $x^2 + y^2 = 4$, що є границею області D, записуємо у вигляді: $x^2 + y^2 = 4; \Rightarrow \rho^2 = 4; \Rightarrow \rho = 2.$ Межі інтегралів по φ і ρ виставляємо по області D (Рис.15): $0 \le \varphi \le 2\pi;\ 0 \le \rho \le 2.$ Щоб розставити межі по z, проводимо пряму, паралельну осі Oz на Рис. 14. Нижня межа по z знаходиться з рівняння площини $z = 1$, верхня з рівняння параболоїда: $5 - z = x^2 + y^2;\quad \Rightarrow 5 - z = \rho^2; \Rightarrow z = 5 - \rho^2.$ Підінтегральна функція в циліндричних координатах набуває вигляду: $z\rho$. Отже:

$$\iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_1^{5-\rho^2} z\rho dz\,.$$

Обчислюємо інтеграл, починаючи з внутрішнього.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \cdot \rho \cdot \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{5-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \left(5 - \rho^2\right)^2 d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(25\rho^2 - 10\rho^4 + \rho^6\right) d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \left(25\frac{\rho^3}{3} - 10\frac{\rho^5}{5} + \frac{\rho^7}{7}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{200}{3} - 64 + \frac{128}{7}\right) = \frac{440}{21}\pi.$$

2.4. Обчислення потрійного інтеграла в сферичних координатах. Якщо область інтегрування обмежена сферами або частинами сфер, то потрійний інтеграл зручно обчислювати в сферичних координатах.

Сферичними координатами точки $M(x, y, z)$ в просторі $Oxyz$ називаються наступні три числа (Рис.16): ρ - довжина радіус-вектора

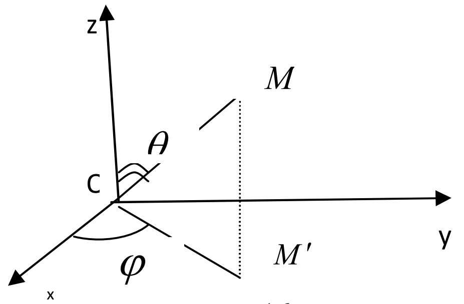

Рис.16

точки M, φ- кут між додатним напрямом Ox і OM', що відраховується проти годинникової стрілки, де M'- проєкція точки M на площину Oxy, θ - кут між додатним напрямом осі Oz і OM, що відраховується від осі Oz. Тоді $\rho \geq 0,\ \varphi \in [0;2\pi];\ \theta \in [0;\pi]$. Зв'язок декартових і сферичних координат має вигляд:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\theta. \qquad (12)$$

Безпосереднім підрахунком легко перевірити рівність: $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

Можна строго довести [1,2,3] формулу переходу до сферичних координат в потрійному інтегралі :

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta. \qquad (13)$$

Приклад. Обчислити $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, де V обмежена поверхнями $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$ (І октант).

Розв'язання. Область інтегрування V зображена на Рис.17, її проєкція D на Рис.18.

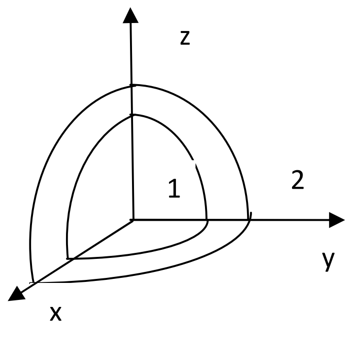

Рис.17

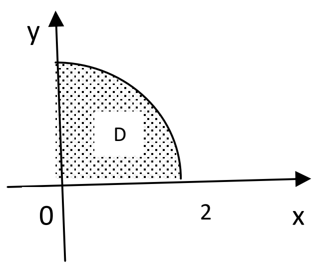

Рис.18

Переходимо до сферичних координат (12). Межі зовнішнього інтеграла по φ визначаємо на Рис.18: $\varphi \in \left[0;\pi/2\right]$. Межі інтеграла по θ визначаємо з Рис.17. Точки, які лежать на додатній півосі Oz мають

$\theta = 0$, точки, що лежать в площині Oxy, мають $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Отже, $\theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Щоб знайти межі внутрішнього інтеграла по ρ, проводимо на Рис.17 промінь з початку відліку. Найменше значення ρ буде у точок, що лежать на сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Тому $\rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1.$ Найбільше - у точок, що лежать на сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Отже, $\rho^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2$. Підінтегральна функція в сферичних координатах набуває вигляд: $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\rho^2}} = \dfrac{1}{\rho}.$ Отже , за (13):

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_1^2 \frac{\rho^2}{\rho} d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \left(\frac{\rho^2}{2} \bigg|_1^2 \right) = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(-\cos\theta\right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2} \varphi \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4}.$$

2.5. Деякі застосування потрійного інтеграла. Розглянемо наступні застосування потрійного інтеграла.

1. Об'єм тіла. Об'єм тіла V знаходимо за формулою ([1,4]):

$$V = \iiint\limits_V dxdydz. \tag{17}$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, що задано поверхнями, які його обмежують : $z = 9\sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 22 - x^2 - y^2$.

Розв'язання. Будуємо V. Рівняння $z = 9\sqrt{x^2 + y^2}$ задає половину конуса, рівняння $z = 22 - x^2 - y^2$- параболоїд з вершиною в точці $(0,0,22)$ (Рис.19). Проекцією області V на площину Oxy буде круг D (Рис.20).

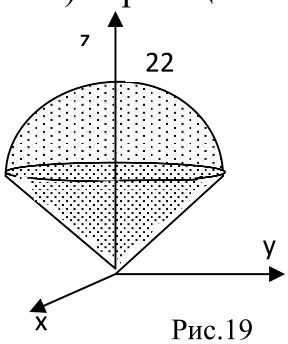

Рис.19

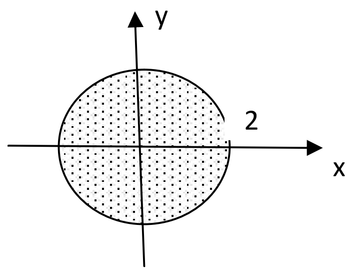

Рис.20

Тому доцільно обчислити інтеграл (17) в циліндричних координатах. В циліндричних координатах рівняння поверхонь набувають вигляду: $z = 9\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z = 9\rho$, $z = 22 - x^2 - y^2 \Rightarrow z = 22 - \rho^2.$ Щоб знайти радіус круга D, треба знайти радіус кола перетину двох поверхонь. Для цього розв'язуємо систему : $\begin{cases} z = 9\rho \\ z = 22 - \rho^2 \end{cases} \Rightarrow 9\rho = 22 - \rho^2 \Rightarrow \rho^2 + 9\rho - 22 = 0.$

Оскільки $\rho \geq 0$, то залишаємо лише додатний розв'язок рівняння: $\rho = 2$. Отже, область D - круг з центром в $(0;0)$ і $r = 2$. Тоді:

$$V = \iiint_V \rho\, d\rho\, d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{9\rho}^{22-\rho^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \cdot z \Big|_{9\rho}^{22-\rho^2} d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \cdot \left(22 - \rho^2 - 9\rho\right) d\rho = = \int_0^{2\pi} \left(22\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2 - 9\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^2 \right) d\varphi =$$

$$16\varphi \Big|_0^{2\pi} = 32\pi \ \left(куб.од\right).$$

2. Маса тіла. Для знаходження маси тіла, що має форму області V, користуємось формулою:

$$m = \iiint_V \gamma\left(x; y; z\right) dxdydz \ , \tag{18}$$

де неперервна функція $\gamma(x; y; z)$ - об'ємна густина розподілу маси в точці $M(x; y; z)$ ([5]).

Приклад. Тіло задане обмежувальними його поверхнями: $9\left(x^2 + y^2\right) = z^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0, y = 0, z = 0$ $\left(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right)$. Функція $\gamma\left(x; y; z\right) = \frac{5}{3}(x^2 + y^2)$ - густина. Знайти масу тіла.

Розв'язання. Згідно з формулою (18) :

$$m = \iiint_V \frac{5}{3}(x^2 + y^2) dxdydz. \tag{19}$$

Зображуємо область V (Рис.21) та її проєкцію D на площину Oxy (Рис.22).

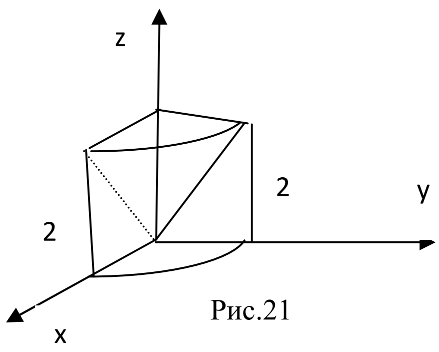

Рис.21

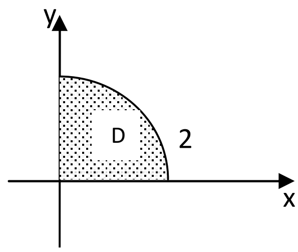

Рис.22

Переходимо в циліндричні координати. Рівняння конуса набуває вигляду: $9\left(x^2+y^2\right)=z^2 \Rightarrow 9\rho^2=z^2 \Rightarrow z=3\rho,$ бо $\left(z\ge 0\right)$. Рівняння кола, що обмежує D: $x^2+y^2=4 \Rightarrow \rho^2=4 \Rightarrow \rho=2.$ Використовуючи (11), обчислюємо (19): $m=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_0^{3\rho} \frac{5}{3}\rho^2 dz = \frac{5}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 z\Big|_0^{3\rho} d\rho = \frac{5}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 3\rho^4 d\rho =$

$$=5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^2 d\varphi = = 32\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 16\pi \text{ (од.маси).}$$

Інші застосування потрійного інтеграла можна знайти, наприклад, в [1,2,3].

3. Варіанти типового розрахунку.

Варіант № 1.

1 Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} fdy+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dx\int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} fdy.$

2 Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x^2+y^2=2x;\ x^2+y^2=4x,$ $y=x;\ y=\sqrt{3}x$.

3 Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_T (x+y)\,dxdydz$,де $T:2x-y+z=2;$ $x=0;y=0;z=0$.

4 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{64-x^2-y^2};\,12z=x^2+y^2$

Варіант № 2.

1 Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} fdy+\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx\int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} fdy$.

2 Обчислити подвійний інтеграл: $\iint\limits_D xdxdy$, де $D:\ x^2+y^2=2y$.

3 Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=1;\ x^2+y^2=4z^2;$ $x=0;\ y=0;\ (x>0;\ y>0;\ z>0)$; $\mu(x,y,z)=20z$ - густина.

4 Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, де $T:z=\sqrt{4-x^2-y^2}\quad x=0;y=0;z=0$.

Варіант № 3.

1 Обчислити подвійний інтеграл: $\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy$, де $D:y=x/2;y=x;y=1/x$.

2 Знайти масу пластини , що обмежена кривими $D:x^2+y^2=1,x^2+y^2=9,$ $x=0;y=0\ (x\ge 0,y\le 0)$, $\mu(x,y,z)=\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$ - поверхнева густина.

3 Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V 21xzdxdydz$, де $V:y=x;x=2;\ y=0;\ z=0;\ z=xy$.

4 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x^2+y^2=2x;\ x^2+y^2=4x,.$ $z=0; z=2$

Варіант № 4.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2y^2dxdy$, де $D: y=2x; y=1/x; y=0; x=3$.
2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x^2+y^2=2y \quad y=x;$ $y=\sqrt{3}x$.
3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V (9+18z)dxdydz$, де $V: y=4x; x=1;\ y=0;\ z=0;\ z=\sqrt{xy}$.
4. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $9\left(x^2+y^2\right)=z^2; x^2+y^2=4; x=0; y=0;\ z=0; \left(x>0; y>0; z>0\right)$, $\mu\left(x,y,z\right)=5\left(x^2+y^2\right)/3$ - густина.

Варіант № 5.

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-y}^{2-2y} fdy$
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де $D: x^2+y^2=2y; x^2+y^2=4y; y=x; y=-x$.
3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x+y=2; x=\sqrt{y};\ z=\frac{12x}{5}$, $z=0.$
4. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=6z; x^2+y^2=1; x=0; y=0;\ z=0; \left(x\ge 0; y\ge 0\right)$, $\mu\left(x,y,z\right)=90y$ - густина.

Варіант № 6.

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$.

2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x^2+y^2=2x$ $y=x$; $y=-x$.

3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V (x-z-1)dxdydz$, де $V: x+2y+z-1=0; x=0;\ y=0;\ z=0$.

4. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=1;\ x^2+y^2=2z;$ $x=0; y=0; z=0$; $(x>0; y>0)$; $\mu(x,y,z)=10x$ - густина.

Варіант № 7.

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} fdx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} fdx$.

2. Знайти масу пластини , що обмежена кривими $D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=16,$ $x=0; y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$, $\mu(x,y,z)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ - поверхнева густина.

3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, де $V: z=\sqrt{x^2+y^2};\ z=3$.

4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=2y;\ x^2+y^2=4y; y=-x;\ y=x;\ z=0;\ z=2.$

Варіант № 8.

1. Обчислити подвійний інтеграл: $\iint\limits_D xdxdy$, де $D: y+x=2; y=x^3; y=0$.

2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x^2+y^2=4y$ $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$; $y=\sqrt{3}x$.

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхням $V: z=x^2+y^2+1;\ x=3, y=3$, $x=0; y=0, z=0.$

4. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V (2+2y+z)dxdydz$, де $V: 2x+2y+z-2=0; x=0;\ y=0;\ z=0$.

Варіант № 9.

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} fdx$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, де $D: x^2 + y^2 = y;$.

$x^2 + y^2 = 4y$.

3. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $x^2 + y^2 = z^2/25; x^2 + y^2 = z/5;$ $x = 0; y = 0;$ $(x > 0; y > 0)$; $\mu(x, y, z) = 14yz$ - густина.

4. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_{V} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$, де $V: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2};\ z = 0$.

Варіант № 10.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} y\,dxdy$, де $D: y = x; y = 3x; y = 1/x$.

2. Знайти масу пластини , що обмежена кривими $D: x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0\ (y \geq 0)$, $\mu(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ - поверхнева густина.

3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_{V} (x^2 + 3y^2)\,dxdydz$, де $V: z = 10x;\ x + y = 1; x = 0; y = 0.$.

4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x^2 + y^2 = 4x;$. $z = 10 - y^2;\ z = 0$.

Варіант № 11.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} x^2\sqrt{y}\,dxdy$, де $D: x + y = 2; y = 0; x = y^3$.

2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x^2 + y^2 = y, x^2 + y^2 = 2y,$ $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}};\ y = x$.

3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_{V} x\,dxdydz$, де $V: y = 10x;\ z = xy;\ x = 1;\ y = 0; z = 0.$.

4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 1{,}5\sqrt{x^2 + y^2};$. $z = 2{,}5 - x^2 - y^2$.

Варіант № 12.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$, де $D: x+y=5; y=2x; y=1$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, де $D: x^2+y^2=\pi^2; x^2+y^2=4\pi^2$.

3. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $z=\sqrt{9-x^2-y^2}; z=\sqrt{4-x^2-y^2}$; $x=0; y=0; z=0$ з густиною : $\mu(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=3\sqrt{x^2+y^2}$; . $z=10-x^2-y^2$.

Варіант № 13.

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$.
2. Знайти масу пластини, що обмежена кривими $D: x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$, $x=0; y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$; $\mu(x,y,z)=\dfrac{2x+5y}{x^2+y^2}$ - поверхнева густина.
3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, де $V: x+z=2;\ y=2;\ x=0;\ y=0;\ z=0.$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{49-x^2-y^2}; z=3$; $x^2+y^2=33; \left(x^2+y^2\le 33\right)$.

Варіант № 14.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де $D: x^2+y^2=2x;\ x^2+y^2=4x;\ y=-x;\ y=x.$
2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x=8-y^2; x=-2y$.
3. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V xdxdydz$, де $V: x+2y+z=2; x=0; y=0; z=0$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{x^2+y^2}; z=0$; $x^2+y^2=2y;\ x^2+y^2=3y$.

Варіант № 15.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(2x^2 - y\right)dxdy$, де $D: y = -\sqrt{x}$; $y = x^2; x = 1$.
2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x^2 + y^2 = 2y;\ y = x;\ x = 0.$.
3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2; x^2 + y^2 = z^2$.
4. Обчислити потрійний інтеграл: $\iiint\limits_V ydxdydz$, де $V: y = \sqrt{x}; x = 0; y = 0; x = 1;\ x + z = 1;\ 2x + z = 2.$

Варіант № 16.

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, де $D: x^2 + y^2 = 4\pi^2; x^2 + y^2 = 9\pi^2.$
3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2};\ z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{255}}$.
4. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V ydxdydz$, де $V: x + y = 2; z = x^2 + y^2; x = 0; y = 0; z = 0$.

Варіант №17.

1. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $y = 3\sqrt{x};\ y = \dfrac{3}{x};\ x = 4.$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, де $D: x^2 + y^2 = \pi^2; x^2 + y^2 = 4\pi^2; y = 0; \left(y \geq 0\right)$.
3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 4y; z = 4 - x^2; z = 0$.
4. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; $x = 0; y = 0; z = 0$ з густиною : $\mu\left(x, y, z\right) = z$.

Варіант №18.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x dxdy$, де $D: y=\cos x; y=0, x\in(-\pi/2;\pi/2)$.
2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x^2+y^2=x;\ y=x;\ y=-x.$
3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=4y;$ $z=\sqrt{x^2+y^2}; z=0$.
4. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $x+y+z-3=0;\ x=0;\ y=0;\ z=0\ \ x=0; y=0; z=0$ з густиною : $\mu(x,y,z)=xyz$.

Варіант №19.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x dxdy$, де $D: y=\cos x; y=\sin x; x=0$.
2. Знайти масу пластини, що обмежена кривими $D: x^2+y^2=2y$, $y=x; y=\frac{x}{\sqrt{3}};\ \mu(x,y,z)=x^2$ - поверхнева густина.
3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (2x+z)dxdydz$, де $V: 2x-y+z=2;$ $x=0; y=0; z=0$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{1-x^2-y^2}; (3/2)z=x^2+y^2.$

Варіант №20.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D y^2 dxdy$, де $D: x+y=2; x=\sqrt[3]{y}; x=0$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$, де $D: x^2+y^2=1; x^2+y^2=4; x=0; (x\geq 0)$.
3. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}; z=\sqrt{4-x^2-y^2};$ $z=0$ з густиною : $\mu(x,y,z)=z^2$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=\sqrt{16-x^2-y^2}; 6z=x^2+y^2$.

Варіант №21.

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \int\limits_{0}^{3\cos y} f(x,y)dx$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x+y)dxdy$, де $D: x^2+y^2=1; x^2+y^2=4; x=0; y=0\left(x\geq 0, y\leq 0\right)$.

3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, де $V: x^2+y^2+z^2=2z$.

4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y=\sqrt{x};\ y=2\sqrt{x};\ x+z=6;\ z=0.$

Варіант №22.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D ydxdy$, де $D: y=\sqrt{x}; y=1/x; x=16$.

2. Знайти масу пластини, що обмежена кривими $D: x^2+y^2=y$, $y=x; y=\sqrt{3}\,x$; $\mu(x,y,z)=y^2$ - поверхнева густина.

3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_V \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}dxdydz$, де $V: x^2+y^2+z^2=4; x^2+y^2+z^2=9$.

4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $az=x^2+y^2;\ 2az=a^2-x^2-y^2.$

Варіант №23.

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де $D: x^2+y^2=2x; x^2+y^2=x;$ $y=-x; y=x$.

2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $x=16;\ y=\sqrt{x};\ y=\frac{1}{x}.$

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=2y; x^2+y^2=4y;$ $z=0;\ z=2.$

4. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_V 15(y^2+z^2)dxdydz$, де $V: z=x+y;\ x+y=1; x=0;\ y=0;\ z=0.$

Варіант №24.

1. Знайти площу фігури, що обмежена лініями $y=-10x; y=11-x^2$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, де $D: x^2+y^2=1; x^2+y^2=4; x=0; y=0 \left(x \geq 0, y \leq 0\right)$.
3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (y+2x)dxdydz$, де $V: z=x+y;\ x+y=1; x=y;\ y=0;\ z=0.$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x^2+y^2=\left(9z/2\right)$; $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

Варіант №25.

1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.
2. Знайти масу пластини, що обмежена кривими $D: x^2+y^2=2x$, $y=x; y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$; $\mu(x,y,z)=x^2$ - поверхнева густина.
3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V \left(x+y\right)dxdydz$, де $V: 2x-y+z=2;$ $x=0; y=0; z=0$.
4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=6\sqrt{x^2+y^2}; z=6-x^2-y^2$.

Література

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальное и интегральное исчисление* - М.: Наука. - 1988. - 432 с.

[2] Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление*. Т.2.- М.: Наука - 1970. - 576 с.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике. Полный курс* (9-е изд.) - М:Высшее образование. - 2009.-606 с.

[4] Кузнецов Л.А. *Сборник заданий по вістей математике* (6 изд.) – С.-П.:Лань – 2007. – 238 с.

[5] Владіміров В.М., Пучков О.А., Шмигевський М.В. *Збірник завдань з вищої математики.* Ч.2. - Київ: Політехніка. - 2002.-108 с.

[6] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика: навчальний посібник*. - Київ: А.С.К.-2005. - ISBN 966-539-320-0. - 648с.